



XIX. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ

24-28 Ağustos 2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon

GEOMETRİK LİNEER DURUMUNDA AYNI FAZLI PERİYODİK EĞİLMİŞ İKİ KOMŞU KARBON NANOTÜP İÇEREN SONSUZ ELASTİK ORTAMDA GERİLME YAYILIMI

Reşat Köşker ve İsmail Gülten

Yıldız Teknik Üniversitesi, Kimya-Metalürji Fakültesi, Matematik Mühendisliği Bölümü,
Davutpaşa Yerleşkesi No:127 Topkapı 34010, İstanbul

ABSTRACT

In this study, within the framework of the piecewise homogeneous body model, with the use of the exact three-dimensional geometrically linear equations of elasticity theory for anisotropic bodies, the determination of the stress-strain state in the infinite body containing periodically located two neighboring periodically curved Carbon Nanotubes (CNT) with infinite length, is studied. It is assumed that the midlines of the CNTs are located in the same plane and with respect to the location of the CNTs according to each other the co-phase curving case is considered. Moreover, the materials of the CNTs are the same. The stress distribution is studied when the body is loaded at infinity by uniformly distributed normal forces in the direction of the CNTs' location. The normal and shear self-equilibrated stresses arising as a result of the CNT curving are analyzed and the influences of the interaction between the CNTs on the distribution are studied. Numerical results to this interaction are obtained.

ÖZET

Bu çalışmada, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde, anizotrop cisimler için elastisite teorisinin üç-boyutlu geometrik lineer kesin denklemleri kullanılarak, sonsuz uzunluklu periyodik eğrilikli komşu iki Karbon Nanotüp (KNT) içeren sonsuz cisimde gerilme değerlerinin belirlenmesi ele alınmıştır. KNT'lerin orta çizgilerinin aynı düzlemde olduğu ve bunların birbirlerine göre yerleşimlerinin aynı fazlı eğrilığe sahip olduğu kabul edilmiştir. Ayrıca lif malzemeleri aynı alınmıştır. Gerilme yayılımı, cisme sonsuzda KNT'ler yönünde düzgün dağılmış normal kuvvetler etki gösterdiğinde incelenmiştir. KNT'lerdeki eğrilikten dolayı artan kendi kendini dengeleyen normal ve kayma gerilmeler analiz edilmiş ve KNT'ler arasındaki etkileşimin yayılıma etkisi çalışılmıştır. Bu etkileşimin sayısal sonuçları elde edilmiştir.

GİRİŞ

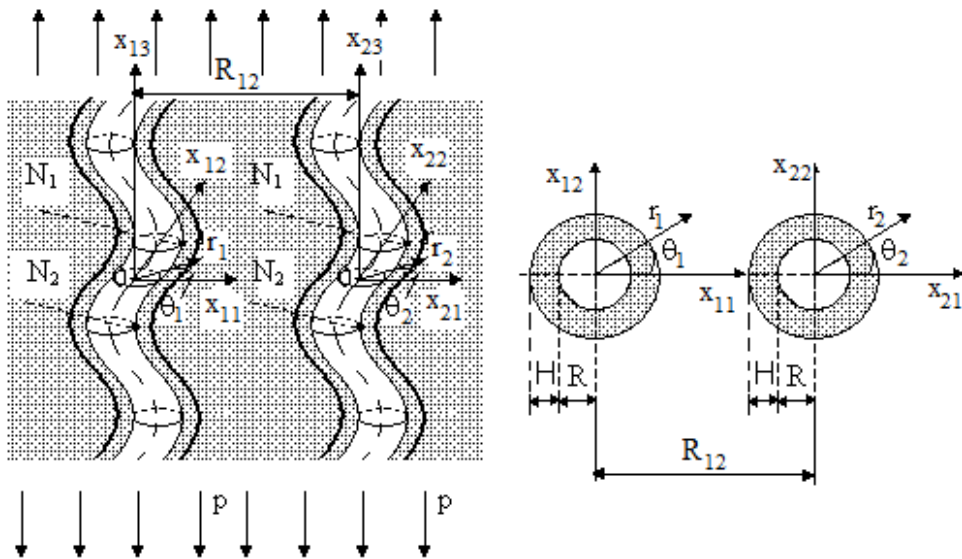
Kompozit malzemeler alüminyum, bakır, çelik vb. mühendislik malzemelerine göre daha fazla avantaja sahip olduklarından günümüzde bu malzemelerin üretimi artmıştır. Kompozit malzemelerin geniş bir alanını oluşturan tek yönlü lifli kompozitlerin mukavemeti, önemli ölçüde bu malzemelerin yapısal özelliklerine bağlıdır. Tek yönlü lifli kompozitlerin en önemli yapısal özelliklerinden biri ise liflerin eğriligidir. Bu liflerin eğrilik nedeni, dizayn sırasında duyulan gereksinim veya teknolojik işlemlerin sonucudur. Genellikle, teknolojik işlemler sırasında ortaya çıkan eğrisellikler yerel eğrilikler, dizayn gereksinimi sonucu ortaya çıkmış olan eğrisellikler ise periyodik eğrilikler şeklinde modellenirler [1, 2]. Üretilen kompozit malzemelerin uygulama başarısı ile kullanılma sırasında istenilen sonuçları vermesi, bu

eğriliği hesaba katarak malzemedeki gerilme ve şekil değiştirme durumunun belirlenmesi ile mümkündür. Liflerin eğrilikleri sonucu, kendi kendini dengeleyen gerilmeler artar ve bu artan gerilmeler, lifler yönünde çekme ve basınç durumlarında, lifler ile matrisin birbirlerinden ayrılmalarına sebep olabilirler [1, 2]. Sonuç olarak, eğrisel yapıya sahip kompozit malzemelerin mekaniğinin tespiti, hem şekil değiştiren katı cisimler mekaniğinin gelişimi hem de modern mühendislikte kullanılan özel kompozit malzeme bileşenlerinin uygulamalarında önemlidir. Bu konuda yapılan birçok araştırmanın geniş biçimde açıklaması ve yorumlaması [1, 2]'de verilmiştir. Buradan görüldüğü gibi eğrisel yapı, tek yönlü lifli kompozitler için gerilme durumu araştırmaları, liflerin hacim oranlarının çok düşük değerlerinde yapılmış ve bu durumda kompozit malzeme periyodik eğilmiş tek bir lifi içeren sonsuz elastik bir ortam gibi modellenmiştir. Böyle bir problemin incelenmesi için [3]'de metod geliştirilmiş ve elde edilen sayısal sonuçlar bu metodun uygulanması ile mümkün olmuştur. Referans [4,5]'de ise yerleşimleri iki paralel doğru boyunca birbirlerine göre aynı fazlı ve zıt fazlı periyodik eğilmiş iki komşu lif içeren sonsuz elastik bir ortam için gerilme durumu araştırılmış ve sayısal sonuçlar verilmiştir. [6, 7, 8] yayınlarında ise sözü geçen kompozitlerde liflerin hacim oranı büyüdükçe lifler arasındaki karşılıklı etkinin ve geometrik nonlineeritenin gerilme yayılımına etkisi incelenmiş, bu amaçla birbirine yakın yerleşmiş sıralı lifler içeren sonsuz elastik bir ortamda gerilme yayılı araştırılmıştır. Araştırmalar parçalı homojen cisim modeli çerçevesinde, üç boyutlu nonlinear elastisite teorisinin kesin denklemleri kullanılarak yapılmıştır. Bu çalışmada, sözü edilen çalışmaların tümünde ele alınan geleneksel kompozit malzeme yerine, sonsuz elastik ortamda birbirine komşu periyodik eğrilikli iki karbon nanotüp (KNT) olduğu düşünülerek arayüzeyde gerilme yayılımı araştırılmıştır. Bu araştırma, parçalı-homojen cisim modeli çerçevesinde, anizotrop cisimler için elastisite teorisinin üç-boyutlu geometrik lineer kesin denklemleri kullanılarak yapılmıştır. KNT'lerin etkileşimlerinin gerilme değerlerine etkisini gösteren sayısal sonuçlar verilmiş ve bunlar tartışılmıştır.

KNT'lerin yarıçapları ile kalınlıklarının lifler boyunca sabit kaldığı varsayılmıştır. (Şekil 1). Aşağıda bu problemin matematiksel formülasyonu verilmektedir.

PROBLEMİN FORMÜLASYON

KNT'lerin dik kesitlerinin R yarıçaplı daire ve kalınlıklarının H olduğunu ve bunun KNT'ler boyunca değişmediğini varsayacağız. Ayrıca KNT'lerin orta çizgilerinin aynı düzlemde ve birbirlerine göre aynı-fazlı başlangıç periyodik eğilmesine sahip olduğunu kabul edeceğiz.



Şekil 1: Formülasyonu yapılan problemin geometrisi ve seçilen koordinat takımları

Her bir KNTün orta çizgisi ile ilgili $O_k x_{k1} x_{k2} x_{k3}$ kartezyen ve $O_k r_k \theta_k z_k$ silindirik koordinat takımlarını seçelim (Şekil 1). Burada $k=1,2$ olup sırası ile birinci ve ikinci KNTleri göstermektedir. Şekil 1’den de görülebileceği gibi, bu koordinatlar arasında

$$x_{12} = x_{22}, \quad x_{13} = x_{23}, \quad r_1 e^{i\theta_1} = R_{12} + r_2 e^{i\theta_2}, \quad z_1 = z_2 = z \quad (1)$$

bağıntıları sağlanmaktadır. KNTnin orta çizgilerinin $x_{12} = x_{22} = 0$ düzleminde olduğunu varsayarsak bu çizgilerin denklemlerini aynı-fazlı durum için (Şekil 1)

$$x_{11} = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{13}\right), \quad x_{21} = L \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x_{23}\right) \quad (2)$$

şeklinde yazabiliriz. Buradaki L ’nin (KNT eğilme genliğinin) ℓ ’den (eğilmenin periyodundan) çok küçük olduğunu kabul ederek $\varepsilon = L/\ell$, ($0 < \varepsilon \ll 1$) parametresini tanımlayalım.

İleride sırası ile birinci ve ikinci KNTye ait olan büyüklükleri (21), (22) üst indisleri ve matrise (sonsuz elastik ortama) ait olan büyüklükleri ise (1) üst indisi ile göstereceğiz. Her bir KNTde ve sonsuz elastik ortamda sağlanmak üzere aşağıdaki alan denklemlerini yazalım:

$$\begin{aligned} \nabla_i \left[\sigma^{(k)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(k)j} \right) \right] &= 0, \quad 2\varepsilon_{jm}^{(k)} = \nabla_j u_m^{(k)} + \nabla_m u_j^{(k)} + \nabla_j u^{(k)n} \nabla_m u_n^{(k)}, \\ \sigma_{(\text{in})}^{(k)} &= \left(\lambda^{(k)} e^{(k)} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)} \varepsilon_{(\text{in})}^{(k)} \right), \quad e^{(k)} = \varepsilon_{rr}^{(k)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k)} + \varepsilon_{zz}^{(k)} \end{aligned} \quad (3)$$

S_k yüzeyleri üzerinde ideal temas koşullarının var olduğunu kabul ederek, bu koşulları

$$\begin{aligned} \sigma^{(2q)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2q)j} \right) \Big|_{S_q} n_{qj} &= 0, \quad \sigma^{(2q)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(2q)j} \right) \Big|_{S_q} n_{qj} = \sigma^{(1)\text{in}} \left(g_n^j + \nabla_n u^{(1)j} \right) \Big|_{S_q} n_{qj}, \\ u_j^{(2q)} \Big|_{S_q} &= u_j^{(1)} \Big|_{S_q} \end{aligned} \quad (4)$$

biçiminde yazarız. Ele alınan durumda

$$\sigma_{zz}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} p, \quad \sigma_{(ij)}^{(1)} \xrightarrow{r_q \rightarrow \infty} 0 \quad (ij) \neq (zz) \quad \text{için} \quad (5)$$

koşulunun sağlandığını da gözönüne alalım. İleride yapılacak araştırmalarda gerilme ve şekil değiştirme tansörlerinin fiziksel bileşenleri kullanılacaktır. Yukarıda verilen formüllerde tansör notasyonu kullanılmıştır. Bu notasyon ileride de kullanılacaktır. Bunun yanında altı çizili indislere göre toplam yapılmayacağını belirtmeliyiz.

Böylece ele alınan problemin formülasyonu tamamlanmış olmaktadır. Problem, (3) denklemlerinin (4) temas ve (5) sınır koşulları çerçevesinde çözümüne getirilmiştir.

ÇÖZÜM YÖNTEMİ

KNTlerin, onları içeren elastik ortamla temas yüzeylerini sırası ile S_1 ve S_2 diye gösterirsek, bu yüzeylerin denklemlerini yukarıda söylenen KNT-kesit formu koşulundan yararlanarak

$$\begin{aligned} r_k &= (1 + \varepsilon^2 (\delta'_k(t_3))^2 \sin^2 \theta_k)^{-1} \left\{ (\varepsilon \delta_k(t_3) + \varepsilon^3 \delta_k(t_3) (\delta'_k(t_3))^2) \sin \theta_k + \right. \\ &\quad \left. \left[R^2 - \varepsilon^2 (\delta_k(t_3))^2 - \varepsilon^4 (\delta'_k(t_3))^2 (\delta_k(t_3))^2 (1 + \varepsilon^2 (\delta'_k(t_3))^2) \sin^2 \theta_k \right]^{1/2} \right\} \\ z_k &= t_3 - \varepsilon \delta'_k(t_3) r_k(t_3) \sin \theta_k + \varepsilon^2 \delta_k(t_3) \delta'_k(t_3), \quad \delta'_k(t_3) = \frac{d\delta_k(t_3)}{dt_3}, \quad \delta_k(t_3) = \ell \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} t_3\right) \end{aligned} \quad (6)$$

şeklinde elde ederiz. Burada $t_3 \in (-\infty, +\infty)$ bir parametredir. (6) denkleminde yararlanarak ve bazı bilinen işlemler yaparak S_k yüzeylerinin birim dış normallerinin bileşenleri için aşağıdaki ifadeleri elde ediyoruz.

$$\begin{aligned}
n_{kr} &= r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1} \\
n_{k\theta} &= \left[\frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right] [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1} \\
n_{kz} &= -r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} [A_k(\theta_k, t_3)]^{-1}
\end{aligned} \quad (7)$$

Burada

$$\begin{aligned}
A_k(\theta_k, t_3) &= \left[\left(r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} - \frac{\partial z_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial \theta_k} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \left(r_k(\theta_k, t_3) \frac{\partial r_k(\theta_k, t_3)}{\partial t_3} \right)^2 \right]^{1/2}
\end{aligned} \quad (8)$$

şeklinde.

Bu problemin incelenmesi için de [1, 2]'de verilmiş olan sınır-formu pertürbasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemle göre aranan büyüklükler, yukarıda tanımlanan ε parametresine göre seri halde aranır.

$$\left\{ \sigma_{(ij)}^{(m)}; \varepsilon_{(ij)}^{(m)}; u_{(i)}^{(m)} \right\} = \sum_{q=0}^{\infty} \varepsilon^q \left\{ \sigma_{(ij)}^{(m),q}; \varepsilon_{(ij)}^{(m),q}; u_{(i)}^{(m),q} \right\} \quad (9)$$

Ayrıca S_k arayüzeylerinin denklemlerini oluşturan (6) ve bu yüzeylerin birim normallerinin bileşenlerini gösteren (7) ifadeleri de ε 'nın serisi halinde aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned}
r_q &= R + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k a_{qk}(\theta_q, t_3), \quad z_q = t_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k b_{qk}(\theta_q, t_3), \\
n_{qr} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_{qk}(\theta_q, t_3), \quad n_{q\theta} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k d_{qk}(\theta_q, t_3), \quad n_{qz} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k g_{qk}(\theta_q, t_3).
\end{aligned} \quad (10)$$

Bu ifadelerde yer alan ve ε^k 'ların katsayıları olan $a_{qk}(\theta_q, t_3), \dots, g_{qk}(\theta_q, t_3)$ 'ler (6)'dan kolaylıkla elde edilebilirler. (3)'den (9)'daki her bir yaklaşım için ayrı ayrı sağlanan alan denklemleri elde edilir. (10)'i kullanırsak (9)'daki her bir yaklaşımı $(r_q = R + H, \theta_q, t_3)$ civarında seriye açarız. Bu son ifadeleri (4)'de yerine koyar ve $n_{qr}, n_{q\theta}, n_{qz}$ 'lerin (10)'deki ifadeleri kullanılırsa, bazı uzun ama bilinen işlemler sonucunda, (9)'daki her bir yaklaşım için $r_k = R + H$ 'de sağlanan temas koşulları elde edilir. Bu durumda, k. temas koşuluna önceki k-1. yaklaşımların tümüne ait büyüklükler dahil olmaktadır.

Sıfırıncı yaklaşımla ilgili denklemlerdeki lineer olmayan terimlerin ihmal edilebildiği ve $\nabla_n u^{(k),0} \ll 1$ alınacağından birinci ve diğer yaklaşımlardaki $(g_n^j + \nabla_n u^{(k),j,0})$ terimin δ_n^j ile yer değiştirebildiği durum ile ilgileneneceğiz. Ayrıca sıfırıncı yaklaşımdaki $\sigma_{(ij)}^{(k),0} (ij) \neq zz$ gerilmelerin $\sigma_{zz}^{(k),0}$ gerilmeleri yanında ihmal edilebildiklerini kabul edeceğiz [9]. Bu varsayıma göre, sıfırıncı yaklaşıma ait alan denklemlerini

$$\begin{aligned}
\nabla_i \sigma^{(k),ij,0} &= 0, \quad 2\varepsilon_{ij}^{(k),0} = \nabla_j u_i^{(k),0} + \nabla_i u_j^{(k),0}, \quad \sigma_{(in)}^{(k),0} = \left(\lambda^{(k)} e^{(k),0} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),0} \right), \\
e^{(k),0} &= \varepsilon_{rr}^{(k),0} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),0} + \varepsilon_{zz}^{(k),0}
\end{aligned} \quad (11)$$

ve temas koşullarını

$$\begin{aligned}\sigma_{(ij)}^{(2q),0}\Big|_{r_q=R} &= 0, \quad \sigma_{(ij)}^{(2q),0}\Big|_{r_q=R+H} = \sigma_{(ij)}^{(1),0}\Big|_{r_q=R+H}, \\ u_{(i)}^{(2q),0}\Big|_{r_q=R+H} &= u_{(i)}^{(1),0}\Big|_{r_q=R+H}; \quad (ij) = rr, r\theta, rz, \quad (i) = r, \theta, z \quad q=1,2\end{aligned}\quad (12)$$

olarak elde ederiz. Böylece sıfırcı yaklaşım, (11) denklemlerinin (12) temas koşulları çerçevesinde çözümlenmesine indirgenmiş olur.

Birinci yaklaşım için alan denklemlerini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nabla_i \left[\sigma^{(k)ij,1} + \sigma^{(k)in,0} \nabla_n u^{(k)j,1} \right] = 0 \quad (13)$$

$$2\varepsilon_{ij}^{(k),1} = \nabla_j u_i^{(k),1} + \nabla_i u_j^{(k),1} \quad (14)$$

$$\sigma_{(in)}^{(k),1} = \left(\lambda^{(k)} e^{(k),1} \right) \delta_i^n + 2 \left(\mu^{(k)} \varepsilon_{(in)}^{(k),1} \right), \quad e^{(k),1} = \varepsilon_{rr}^{(k),1} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} + \varepsilon_{zz}^{(k),1}. \quad (15)$$

Bu yaklaşım için temas koşullarını ise aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned}\left[\sigma_{(ir)} \right]^{2q,1} + f_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]^{2q,0} + \phi_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]^{2q,0} + \gamma_{rq} \left[\sigma_{(ir)} \right]^{2q,0} + \gamma_{\theta q} \left[\sigma_{(i)\theta} \right]^{2q,0} + \gamma_{zq} \left[\sigma_{(i)z} \right]^{2q,0} &= 0 \\ \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,1}^{2q,1} + f_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2q,0} + \phi_{1q} \left[\frac{\partial \sigma_{(ir)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{rq} \left[\sigma_{(ir)} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{\theta q} \left[\sigma_{(i)\theta} \right]_{1,0}^{2q,0} + \gamma_{zq} \left[\sigma_{(i)z} \right]_{1,0}^{2q,0} &= 0 \\ \left[u_{(i)} \right]_{1,1}^{2q,1} + f_{1q} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial r} \right]_{1,0}^{2q,0} + \phi_{1q} \left[\frac{\partial u_{(i)}}{\partial z} \right]_{1,0}^{2q,0} &= 0\end{aligned}\quad (16)$$

(17)'deki f_{1q} , ϕ_{1q} , γ_{rq} , $\gamma_{\theta q}$, γ_{zq} fonksiyonlarının açık ifadeleri aşağıdadır.

$$\begin{aligned}[\phi]^{2k,s} &= \phi^{(2k),s}, \quad [\phi]_{1,s}^{2k,s} = \phi^{(2k),s} - \phi^{(1),s}; \quad f_{1k} = \delta_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}}; \quad \phi_{1k} = -R \delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}}, \\ \gamma_{rk} &= \left(\frac{\delta_{\underline{k}}(t_3)}{R} - \delta''_{\underline{k}}(t_3) R \right) \cos \theta_{\underline{k}}; \quad \gamma_{\theta k} = -\frac{\delta_{\underline{k}}(t_3)}{R} \sin \theta_{\underline{k}}; \quad \gamma_{zk} = -\delta'_{\underline{k}}(t_3) \cos \theta_{\underline{k}}; \quad k=1,2\end{aligned}\quad (17)$$

Bu kısımda, yukarıda formülasyonu verilen sıfırcı ve birinci yaklaşımlara ait sınır-değer problemlerinin çözümlerini elde edeceğiz. Sadelik için her iki lif malzemesinin aynı olduğunu ve bu malzemelerin $\nu^{(21)} = \nu^{(22)} = \nu^{(2)} \quad (\nu^{(2q)} \text{ q. lifin Poisson oranı})$ şeklindeki Poisson oranının, $\nu^{(1)}$ şeklinde göstereceğimiz matris malzemesinin Poisson oranına eşit olduğunu varsayacağız.

Bu durumda sıfırcı yaklaşım için aşağıdaki çözümü elde ederiz.

$$\begin{aligned}\sigma_{zz}^{(1),0} &= p; \quad \sigma_{zz}^{(21),0} = \sigma_{zz}^{(22),0} = \frac{E^{(2)}}{E^{(1)}} p; \quad \varepsilon_{zz}^{(21),0} = \varepsilon_{zz}^{(22),0} = \varepsilon_{zz}^{(1),0} = \frac{p}{E^{(1)}}; \quad z = z_1 = z_2 \\ u_z^{(21),0} &= u_z^{(22),0} = u_z^{(1),0} = \varepsilon_{zz}^{(1),0} z; \quad \sigma_{(ij)}^{(2q),0} = \sigma_{(ij)}^{(1),0} = 0; \quad (ij) = rr, \theta\theta, r\theta, \theta z, rz\end{aligned}\quad (18)$$

(19)'daki $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ sırası ile matris ve lif malzemelerinin elastisite modülleridirler.

Şimdi birinci yaklaşıma ait olan (13)-(17) probleminin çözümünü ele alalım. Yukarıda yapılan kabuller ve sıfırcı yaklaşımın (18) çözümünün dikkate alınması ile (13) denklemleri

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(k),1}}{\partial r_{\underline{k}}} + \frac{1}{r_{\underline{k}}} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial \theta_{\underline{k}}} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}} + \frac{1}{r_{\underline{k}}} \left(\sigma_{rr}^{(k),1} - \sigma_{\theta\theta}^{(k),1} \right) + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_r^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(k),1}}{\partial r_{\underline{k}}} + \frac{1}{r_{\underline{k}}} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(k),1}}{\partial \theta_{\underline{k}}} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}} + \frac{2}{r_{\underline{k}}} \sigma_{r\theta}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_{\theta}^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(k),1}}{\partial r_{\underline{k}}} + \frac{1}{r_{\underline{k}}} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k),1}}{\partial \theta_{\underline{k}}} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}} + \frac{1}{r_{\underline{k}}} \sigma_{rz}^{(k),1} + \sigma_{zz}^{(k),0} \frac{\partial^2 u_z^{(k),1}}{\partial z_{\underline{k}}^2} &= 0\end{aligned}\quad (19)$$

haline gelir. Bu denklemler üç boyutlu lineerize edilmiş elastisite denklemleri ile çakışmaktadır. Benzer şekilde (14) denklemleri

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(k),1} &= \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial r_k}, \quad \varepsilon_{r\theta}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_k} \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial r_k} - \frac{u_\theta^{(k),1}}{r_k} \right), \quad \varepsilon_{rz}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial r_k} + \frac{\partial u_r^{(k),1}}{\partial z_k} \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(k),1} &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial \theta_k} + \frac{u_r^{(k),1}}{r_k}, \quad \varepsilon_{\theta z}^{(k),1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta^{(k),1}}{\partial z_k} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial \theta_k} \right), \quad \varepsilon_{zz}^{(k),1} = \frac{\partial u_z^{(k),1}}{\partial z_k},\end{aligned}\quad (20)$$

olur. Sıfırıncı yaklaşımda elde edilen çözüm dikkate alınırsa birinci yaklaşıma ait (16) temas koşulları aşağıdaki şekilde elde edilirler.

$$\begin{aligned}[\sigma_r]^{2k,1} &= 0, \quad [\sigma_{r\theta}]^{2k,1} = 0, \quad [\sigma_{rz}]^{2k,1} = \delta_k'(t_3) \sigma_{zz}^{(2),0} \cos \theta_k, \quad [\sigma_{rr}]_{1,1}^{2k,1} = 0, \quad [\sigma_{r\theta}]_{1,1}^{2k,1} = 0, \\ [\sigma_{rz}]_{1,1}^{2k,1} &= \delta_k'(t_3) (\sigma_{zz}^{(1),0} - \sigma_{zz}^{(2),0}) \cos \theta_k, \quad [u_r]_{1,1}^{2k,1} = 0, \quad [u_\theta]_{1,1}^{2k,1} = 0, \quad [u_z]_{1,1}^{2k,1} = 0\end{aligned}\quad (21)$$

(21) denklemlerinin çözümü için (19)'u da dikkate alarak aşağıdaki gösterilimi [1] kullanalım.

$$\begin{aligned}u_r^{(k),1} &= \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \psi^{(k)} - \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial z} \chi^{(k)}; \quad u_\theta^{(k),1} = -\frac{\partial}{\partial r_k} \psi^{(k)} - \frac{1}{r_k} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k \partial z} \chi^{(k)}; \quad \Delta_1^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial r_k^2} + \frac{1}{r_k} \frac{\partial}{\partial r_k} + \frac{1}{r_k^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_k^2} \\ u_z^{(k),1} &= (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})^{-1} \left((\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}) \Delta_1^{(k)} + (\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)};.\end{aligned}\quad (22)$$

Buradaki $\psi^{(k)}, \chi^{(k)}$ fonksiyonları aşağıdaki denklemleri sağlarlar.

$$\left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_1^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi^{(k)} = 0; \quad \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_2^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\Delta_1^{(k)} + (\xi_3^{(k)})^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \chi^{(k)} = 0 \quad (23)$$

(23)'teki $\xi_i^{(k)}$ ($k=21,22,1; i=1,2,3$)'ler sabittirler ve aşağıdaki şekilde belirlenirler.

$$\xi_1^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_2^{(k)} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\mu^{(k)}}}, \quad \xi_3^{(k)} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)} + \sigma_{zz}^{(k),0}}{\lambda^{(k)} + 2\mu^{(k)}}}. \quad (24)$$

Bu durumda (24) denklemlerinin çözümü, (21) denklemlerinin sağ tarafındaki ifadeler de dikkate alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}\psi^{(2k),1} &= \alpha \sin \alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ C_n^{(2k)} I_n(\xi_1^{(2k)} \alpha r_k) + D_n^{(2k)} K_n(\xi_1^{(2k)} \alpha r_k) \right\} \exp(in\theta_k), \\ \chi^{(2k),1} &= \cos \alpha z \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ A_n^{(2k)} I_n(\xi_2^{(2k)} \alpha r_k) + B_n^{(2k)} I_n(\xi_3^{(2k)} \alpha r_k) + \right. \\ &\quad \left. E_n^{(2k)} K_n(\xi_2^{(2k)} \alpha r_k) + F_n^{(2k)} K_n(\xi_3^{(2k)} \alpha r_k) \right\} \exp(in\theta_k),\end{aligned}\quad (25)$$

$$\begin{aligned}\psi^{(1),1} &= \alpha \sin \alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(1)k} K_n(\xi_1^{(1)} \alpha r_k) \exp(in\theta_k), \\ \chi^{(1),1} &= \cos \alpha z \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n^{(1)k} K_n(\xi_2^{(1)} \alpha r_k) + B_n^{(1)k} K_n(\xi_3^{(1)} \alpha r_k) \right] \exp(in\theta_k)\end{aligned}\quad (26)$$

(25), (26)'da $\alpha = 2\pi/\ell$ ve $I_n(x), K_n(x)$ sırası ile sanal argümanlı Bessel fonksiyonu ve Macdonald fonksiyonlarıdır. $A_n^{(2k)}, \dots, C_n^{(2k)}, A_n^{(1)k}, \dots, C_n^{(1)k}$ bilinmeyenleri kompleks sabitlerdir ve aşağıdaki ilişkileri sağlarlar:

$$\begin{aligned}A_n^{(2k)} &= \overline{A_{-n}^{(2k)}}, \quad B_n^{(2k)} = \overline{B_{-n}^{(2k)}}, \quad C_n^{(2k)} = \overline{C_{-n}^{(2k)}}, \quad \text{Im } A_0^{(2k)} = \text{Im } B_0^{(2k)} = \text{Im } C_0^{(2k)} = 0 \\ A_n^{(1)k} &= \overline{A_{-n}^{(1)k}}, \quad B_n^{(1)k} = \overline{B_{-n}^{(1)k}}, \quad C_n^{(1)k} = \overline{C_{-n}^{(1)k}}, \quad \text{Im } A_0^{(1)k} = \text{Im } B_0^{(1)k} = \text{Im } C_0^{(1)k} = 0\end{aligned}\quad (27)$$

Böylece (21) denklemleri, bilinmeyen sabitler için sonsuz cebirsel homojen olmayan lineer denklemler takımı oluşturur.. Bu durumda (r_2, θ_2) koordinatlarında verilen büyüklükleri (r_1, θ_1) koordinatlarında yazabilmemiz için veya aksine (r_1, θ_1) 'dekileri (r_2, θ_2) koordinatlarında yazabilmemiz amacı ile $K_n(x)$ için verilen toplama teoreminden (summation theorem) [10] ve silindirik koordinat takımları arasındaki bağıntılardan yararlanacağız.

$$r_m \exp i\theta_m = R_{mn} \exp i\phi_{mn} + r_n \exp i\theta_n,$$

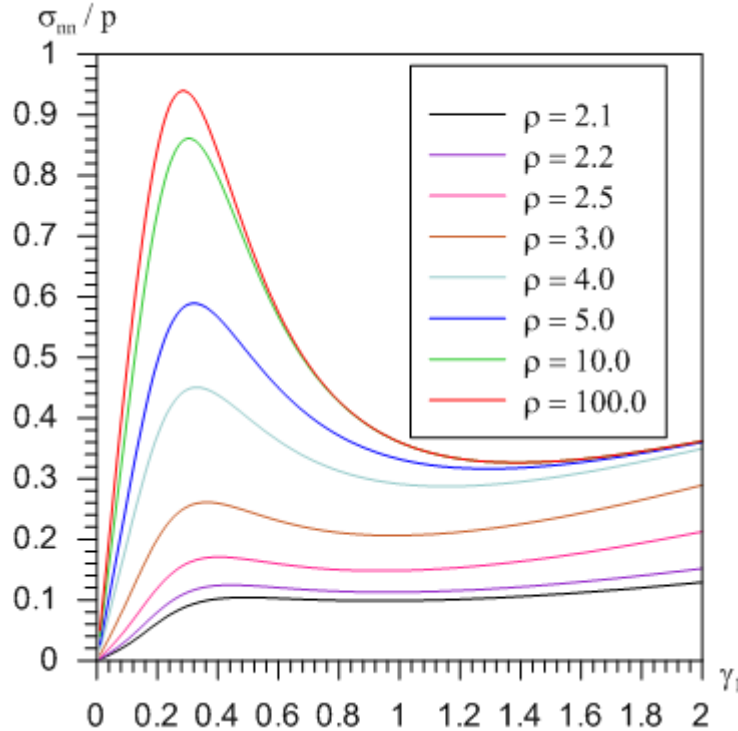
$$K_\nu(cr_n) \exp i\nu\theta_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k I_k(cr_m) K_{\nu-k}(cR_{mn}) \exp[i(\nu-k)\phi_{mn}] \exp ik\theta_m,$$

$$mn=12;21; \quad m;n=1,2; \quad r_m < R_{mn}; \quad R_{12}=R_{21}; \quad \phi_{12}=0; \quad \phi_{21}=\pi. \quad (28)$$

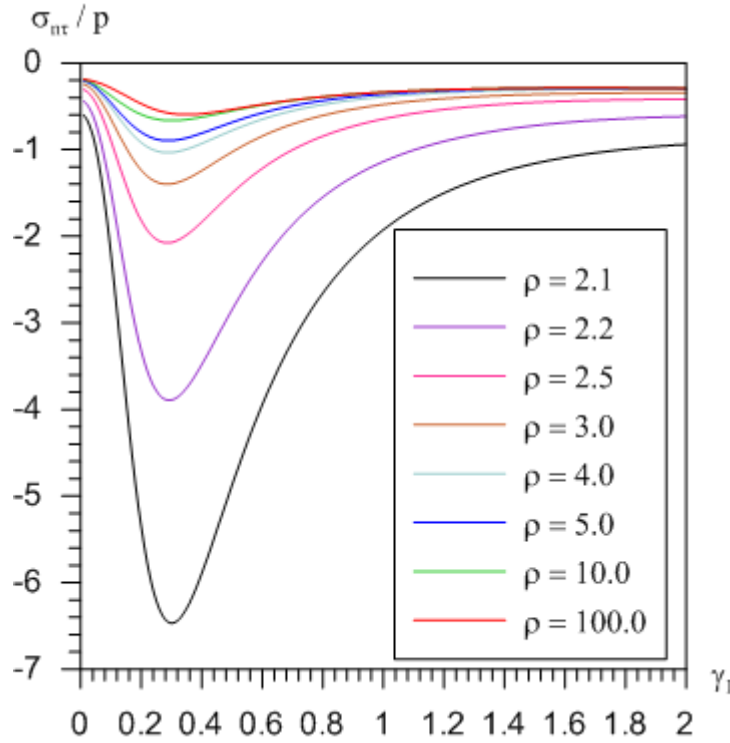
Böylece sonsuz boyutlu denklemler sistemi elde edilir. Bu sistem, yakınsaklık kriteri kullanılarak çözülüp bilinmeyenler belirlenirse ulaşılmak istenen gerilme değerleri belirlenmiş olur.

SAYISAL SONUÇLAR

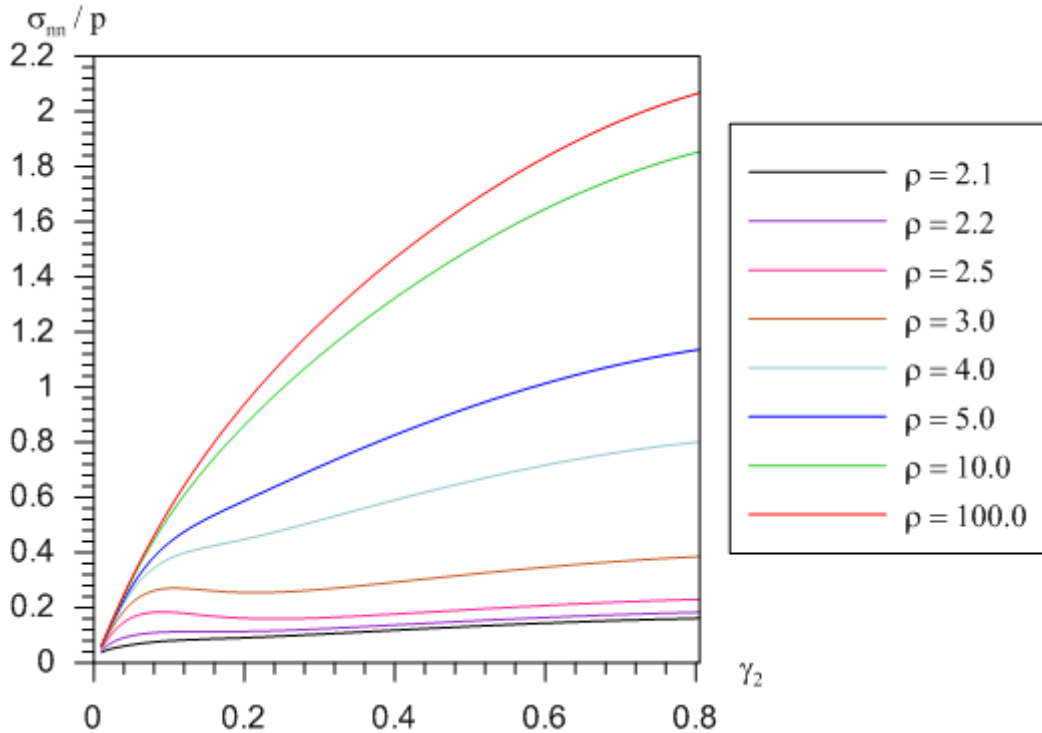
Bu çalışmada, sayısal sonuçlar, sıfırıncı ve birinci yaklaşımlar kullanılarak elde edilmiştir. Bundan sonraki yaklaşımlar, sonuçlara ancak nicelik olarak katkıda bulunabilir. Ayrıca, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0.3$ olarak alınmış ve KNT'lerin karşılıklı etkileşimlerinin gerilme değerlerine katkısını gösteren $\rho = R_{12}/R$ parametresi tanımlanmıştır. Bunun dışında $E = E^{(2)}/E^{(1)}$, $\gamma_1 = 2\pi(R+H)/\ell = \alpha(R+H)$, $\gamma_2 = H/(R+H)$ parametrelerinin gerilme yayılımına katkısı da incelenmek sureti ile elastisite modülleri oranı ve KNT kalınlığının ve yarıçapının bu yayılıma etkisi hesaplanmış olacaktır. İncelemeler yapılırken KNT barındıran nanokompozit malzemenin malzeme sabitlerinin sınırları da [11] dikkate alınacaktır. Gerilmelerin maksimum değer aldıkları σ_m için $\theta=0, \alpha t_3 = \pi/2$, σ_{nr} için $\theta=0, \alpha t_3 = 0$ ve σ_{ne} için $\theta = \pi/2, \alpha t_3 = \pi/2$ değerleri kullanılmıştır.



Şekil 2: $E = 300$, $\gamma_2 = 0.2$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde σ_m / p nin γ_1 ile değişimi



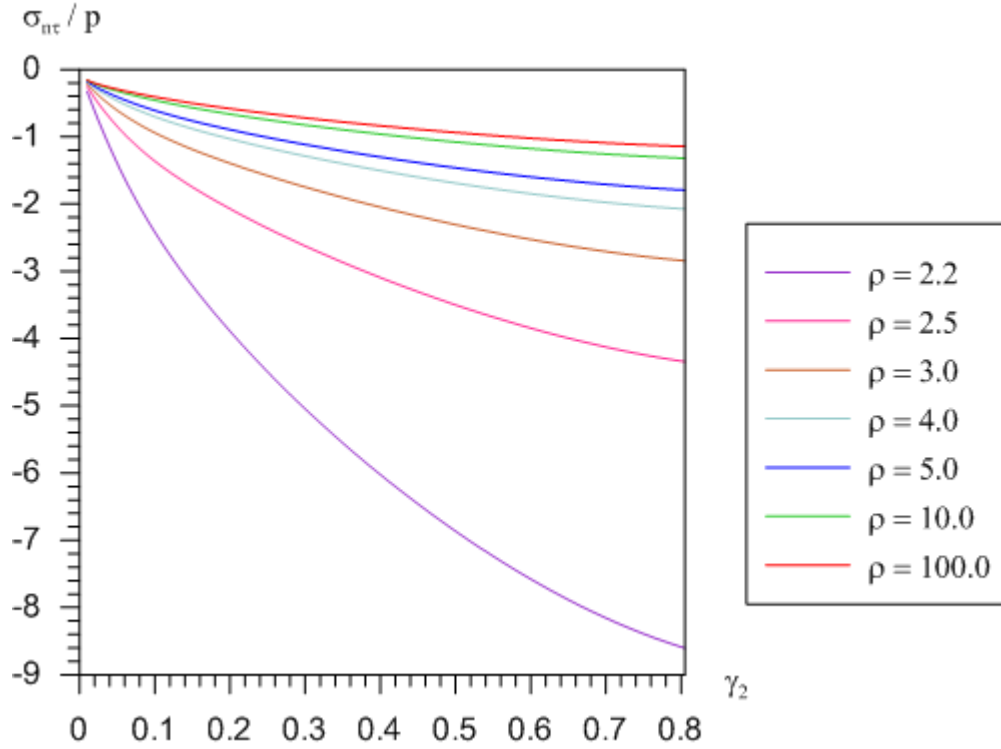
Şekil 3: $E = 300$, $\gamma_2 = 0.2$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde σ_{nr}/p nin γ_1 ile değişimi



Şekil 4: $E = 300$, $\gamma_1 = 0.3$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde σ_{nn}/p nin γ_2 ile değişimi

Şekil 2 ve 3, $E = 300$, $\gamma_2 = 0.2$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde sırasıyla σ_{nn}/p ve σ_{nr}/p nin γ_1 ile değişimi görülmektedir. Buna göre KNT'ler birbirine yaklaşıırken normal gerilmenin azaldığı, kayma gerilmesinin mutlak değerce arttığı ve kayma gerilmesinin normal gerilme değerlerine göre oldukça büyük olduğu sonucu çıkarılmaktadır. Ayrıca KNT'lerin yarıçapları ile gerilmeler arasındaki ilişkinin karakteri monoton değildir. Şekil 4 ve 5,

$E = 300$, $\gamma_1 = 0.3$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde sırasıyla σ_{nm} / p ve σ_{nr} / p nin γ_2 ile değişimini göstermektedir. Buna göre, KNT kalınlığının artması gerilme değerlerinin monoton olarak artmasını sağlamakta ve KNT'ler birbirine yaklaşıırken normal gerilme değerleri azalırken kayma gerilme değerleri mutlak olarak artmaktadır. Kalınlığın değişiminde de dikkate alınması gereken gerilmenin kayma gerilmesi olduğu gözlenmektedir.



Şekil 5: $E = 300$, $\gamma_1 = 0.3$, $\varepsilon = 0.015$ ve çeşitli ρ değerlerinde σ_{nr} / p nin γ_2 ile değişimi

Çizelge 1: $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.2$, $\rho = 3$ değerlerinde E ve ε parametrelerinin gerilme değerlerine etkisi

E	ε	$\frac{\sigma_{nm}}{p}$	$\frac{\sigma_{nr}}{p}$	$\frac{\sigma_{ne}}{p}$
300	0.01	0.1694	-0.9301	-0.6174
	0.015	0.2541	-1.3951	-0.9262
	0.02	0.3389	-1.8602	-1.2349
400	0.01	0.1899	-1.0858	-0.7381
	0.015	0.2849	-1.6287	-1.1071
	0.02	0.3799	-2.1717	-1.4762
500	0.01	0.2057	-1.2114	-0.8356
	0.015	0.3086	-1.8172	-1.2534
	0.02	0.4115	-2.4229	-1.6712
1000	0.01	0.2514	-1.5946	-1.1337
	0.015	0.3771	-2.3920	-1.7005
	0.02	0.5028	-3.1893	-2.2674

Çizelge 2: Denklem sayısı ile gerilme değerlerinin yakınsaması ($E = 300$, $\gamma_1 = 0.3$, $\rho = 2.1$, $\gamma_2 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.2$, $\rho = 2.1$)

	Denklem Sayısı						
	132	141	150	159	168	177	186
σ_{xx}/p	0.0901	0.0899	0.0898	0.0898	0.0899	0.0899	0.0900
σ_{xy}/p	-6.4086	-6.4278	-6.4417	-6.4518	-6.4590	-6.4643	-6.4682
σ_{yy}/p	-0.8626	-0.8627	-0.8627	-0.8628	-0.8628	-0.8627	-0.8627

Çizelge 1’de $\gamma_1 = 0.3$, $\gamma_2 = 0.2$, $\rho = 3$ değerlerinde E ve ε parametrelerinin gerilme değerlerine etkisi verilmiştir. Buradan, gerilme değerlerinin mutlak değerce E ve ε parametreleri ile arttığı ve bu artışın σ_{xy}/p kayma gerilmesinde daha çok olduğu sonucu çıkmaktadır. Çizelge 2’de $E = 300$, $\gamma_1 = 0.3$, $\rho = 2.1$, $\gamma_2 = 0.2$, $\gamma_2 = 0.2$, $\rho = 2.1$ değerlerinde denklem sayısı ile gerilme değerlerinin yakınsaması görülmektedir. Yakınsamanın iyi olduğu 186 denklemin yeterli olacağı bu tablodan elde edilmektedir. Buradan yola çıkılarak bütün hesaplarda 186 denklem kullanılmıştır.

Açıklama: Bu araştırma Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğü'nce desteklenmiştir. Proje No: 2014-07-03-DOP01

KAYNAKLAR

- [1] S.D. Akbarov, *Stability Loss and Buckling Delamination: Three-Dimensional Linearized Approach for Elastic and Viscoelastic Composites*, Springer, 2012.
- [2] S. D. Akbarov and A. N. Guz, *Mechanics of Curved Composites*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] S. D. Akbarov and A. N. Guz, Method of Solving Problems in the Mechanics of Fiber Composites With Curved Structures, *Soviet Applied Mechanics*, 1985, 777-785.
- [4] S. D. Akbarov and R. Kosker, Stress Distribution Caused By Anti-Phase Periodical Curving of Two Neighbouring Fibers in a Composite Material, *European Journal of Mechanics A/Solids*. 22 (2003) 243–256.
- [5] S. D. Akbarov and R. Kosker, On a Stress Analysis in the Infinite Elastic Body with Two Neighbouring Curved Fibers, *Composites Part B: Engineering*, 34, 2,(2003) 143-150.
- [6] S.D. Akbarov, R. Kosker and Y. Ucan, Stress Distribution in an Elastic Body with a Periodically Curved Row of Fibers, *Mechanics of Composite Materials*, 40- 3, (2004) 191-202.
- [7] S.D. Akbarov, R. Kosker and Y. Ucan, Stress Distribution in a Composite Material With the Row of Anti-Phase Periodically Curved Fibres, *International Applied Mechanics*, 42 4 (2006) 486-493.
- [8] S.D. Akbarov, R. Kosker and Y. Ucan, The Effect of the Geometrical Non-Linearity on the Stres Distribution in the Infinite Elastic Body with a Periodically Curved Row of Fibers, *CMC: Computers, Materials & Continua*, 17- 2 (2010) 77-102.
- [9] S.D. Akbarov, R. Kosker ve Y. Ucan, Aynıfazlı Periyodik Eğilmiş Sıralı Lif İçeren Sonsuz Elastik Ortamda Geometrik Nonlineeritenin Gerilme Yayılımına Etkisi, XIV. Ulusal Mekanik Kongresi, Mustafa Kemal Üniversitesi, Hatay, 2005 15-24.
- [10] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1966.
- [11] S.D. Akbarov, Microbuckling of a doublewalled carbon nanotube embedded in an elastic matrix, *International Journal of Solids and Structures*, 50, 16-17, (2013), 2584-2596.